تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

دراسة العلاقة بين نوع المعادلة الغير خطية والتخمين المبدئي على نتائج جذور المعادلة الغير خطية باستخدام الطرق العددية المفتوحة ذات شرط التوقف الداخلي

http://www.doi.org/10.62341/hmal1841

د. هناء المنير أحمد لوكه
كلية التربية أبو عيسى / جامعة الزاوية
h.louka@zu.edu.ly

الملخص:

يتلخص موضوع البحث في القاء الضوء على تأثير التخمين المبدئي على إيجاد جذور المعادلة الغير خطية باستخدام الطرق العددية المفتوحة ذات شرط التوقف الداخلي، حيث تم اخذ ثلاثة امثلة لمعرفة العلاقة بين التخمين المبدئي ونتائج جذور المعادلة الغير خطية باستخدام الطرق العددية المفتوحة ذات شرط التوقف الداخلي، وحساب القيم الدقيقة للجذور بالطريقة الرياضية المباشرة. بعدها تم حساب قيم جذور المعادلة الغير خطية باستخدام الطرق العددية المفتوحة وهي: طريقة نيوتن رافسون، طريقة القاطع، طريقة النقطة الثابتة. تم حساب قيمة الخطأ النسبي المئوي لكل طريقة للأمثلة الثلاثة امثلة، وذلك لغرض دراسة النتائج ومقارنتها مع بعضها البعض، وكانت النتائج أن نوع المعادلة يتحكم بشكل مباشر في إمكانية او عدم إمكانية إيجاد التخمين المبدئي الذي يحقق شرط التقارب للطرق الثلاثة وبالتالي فهو يتحكم في نتائج جذور المعادلة الغير خطية باستخدام شرط التوقف الداخلي.

الكلمات المفتاحية: طريقة النقطة الثابتة، طريقة القاطع، طريقة نيوتنرافسون.

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

Investigate the Relationship Between the type of Non-Linear Equation and the Initial Estimation on the Results of the Roots of the Non-Linear Equation using Open Numerical Methods with an Internal Stop Condition

Hana louka

Department of Mathematics, Faculty Abu Eisa, University of Zawiya
Zawiya, *Libya*
h.louka@zu.edu.ly

Abstract:
This research focuses on highlighting the impact of initial guessing on finding the roots of a nonlinear equation using open numerical methods with an internal stopping condition. Three examples were taken to understand the relationship between the initial guess and the results of the roots of the nonlinear equation using open numerical methods with an internal stopping condition. Precise values of the roots were calculated using the direct mathematical method. Subsequently, the roots of the nonlinear equation were calculated using open numerical methods, which are: Newton-Raphson method, secant method, and fixed-point method. The relative percentage error for each method was calculated for the three examples, in order to study and compare the results. The findings indicated that the type of equation directly controls the possibility or impossibility of finding the initial guess that meets the convergence condition for the three methods, and thus, it controls the results of the roots of the nonlinear equation using the internal stopping condition.

Keywords: Fixed Point Method, Secant Method, Newton Raphson Method.

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

المقـــــــــــدمة:

قد لا يكون إيجاد جذور المعادلات الغير خطية سهلاً في كثير من الحالات العملية، حيث قد يكون لبعض تلك المعادلات العديد من الجذور وتحديد واحد منها فقط قد لا يكون أمراً سهلاً. فعلى سبيل المثال لو نظرنا الى المعادلة:

$$f(x) = e^x - \cos(x)$$

قد تبدو للوهلة الأولى بسيطة الا أنها في الواقع لها عدد كبير من الجذور وإيجاد جذر واحد فقط منها تحليلاً ليس بالأمر السهل. وبالرغم من صعوبة أو استحالة إيجاد جذور مثل هذه المعادلات في بعض الأحيان بطرق رياضية صريحة فإن استخدام الطرق العددية يوفر وسيلة مناسبة لإيجاد تلك الجذور، أو على الأقل إيجاد تقريب مناسب لها، لذلك يتم اللجوء الى الطرق العددية لتقدير جذور المعادلات اللاخطية.

لإيجاد الجذر (الحل) باستخدام الطرق العددية هناك عدة معطيات قد يتم اعطاؤها في المسألة كتخمينين مبدئيين للجذر لبدء عملية التكرار أو وجود شرط إيقاف خطوات الحل بدقة معينة، ولكن في هذا البحث ستكون المسائل مقتصرة على المعادلة والحل الدقيق فقط.

محـــاور البحـــث:

المحـــــــور الأول: المتمثل في معرفة الطرق العددية المفتوحة والمغلقة لإيجاد جذور المعادلة اللاخطية.

بفرض أن $y = f(x) = 0$ معادلة غير خطية عندما لا يمكن إيجاد جذر لهذه المعادلة بالطرق التحليلية لا يبقى لنا سوى خيار واحد هو الطرق العددية المفتوحة او المغلقة لإيجاد جذور المعادلة الغير خطية (فصيلة والرويعي، 2006)، (ريتشاردلو دوغلاس،2014)، (التومي والشوشة، 2015)،(السعيد، 2011)، (عبود، 2018)، (عيد،2011. وفي هذا البحث سندرس تأثير التخمين المبدئي على إيجاد جذور المعادلة الغير خطية باستخدام الطرق العددية المفتوحة ذات شرط التوقف الداخلي .

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

الطرق المفتوحة لإيجاد جذور المعادلة الغير خطية

- **طريقة نيوتن رافسون:**

تعتبر طريقة نيوتن –رافسون من الطرق المفتوحة الأكثر استخداماً لإيجاد اصفار المعادلة بشكل تقريبي دقيق.

يمكن تلخيص خطوات الحل باستخدام طريقة نيوتن –رافسون كالاتي:

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في $(a،b)$، ولتكن x_0 القيمة الأولية للجذر،

$$x_1 = x_0 + h$$

$$\Longrightarrow f(x_1) = f(x_0 + h)$$

نوجد x_{i+1} باستخدام الصيغة التالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\ , i = 0,1,2, \ldots$$

شرط التقارب بهذه الطريقة:

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)}\right| < 1$$

نتوقف عندما $|x_n - x_{n-1}| = |x_{n+1} - x_n|$أو $f(x_n) = 0$.

- **طريقة القاطع:**

من بين المشاكل التي تواجه تطبيق طريقة نيوتن رافسون الحاجة الى إيجاد قيمة المشتقة الأولى للمعادلة التي نبحث عن جذرها، لأنه قد توجد معادلات يكون من الصعب إيجاد تفاضلها. في هذه الحالة يمكن استخدام طريقة القاطع.

تعتبر هذه الطريقة من الطرق المفتوحة لأنها تتطلب هذه الطريقة تخمينين مبدئيين للجذر لبدء عملية التكرار $(x_0،x_{-1})$بشرط أن يكون هذين التخمينين على جانبين مختلفين من الجذر الذي نبحث عنه.

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

نوجد x_{i+1} باستخدام الصيغة التالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}\ , i = 0,1,2, \ldots$$

- **طريقة النقطة الثابتة:**

من الطرق المفتوحة، ويطلق عليها العديد من الأسماء الأخرى مثل التكرار المباشر والنقطة الواحدة وغيرها ولكننا هنا سنسميها طريقة النقطة الثابتة.

لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية في الصورة العامة $f(x) = 0$ بهذه الطريقة يتم ترتيب المعادلة ووضعها في الصورة $x = g(x)$.

ولكي تكون $x = g(x)$ مناسبة للحصول على الجذر الذي نبحث عنه بحيث يجب توفر شرط التقارب في التخمين المبدئي الذي نبدأ به عملية التكرار لضمان التقارب للجذر المطلوب أي يجب التأكد أن $|g'(x_0)| \leq 1$.

نتوقف عندما $|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}|$ أو $f(x_n) = 0$.

المحـــور الثاني: إيجاد القيم الحقيقية والتقريبية لجذور المعادلات الغير خطية لبعض الدوال ومعرفة مدى تأثير التخمين المبدئي على دقة النتائج المتحصل عليها باستخدام الطرق العددية المفتوحة ذات شرط التوقف الداخلي.

لنأخذ ثلاثة أمثلة، وسنجد حلها وفق الطرق الرياضية المباشرة.

<u>أولًا- حساب القيم الحقيقية الدقيقة:</u>

جدول 1. يبين تطبيقات عمليه للمحور الثانيلإيجاد الجذر الحقيقي لبعض الدوال

المعادلة الغير خطية	القيمة الحقيقية
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0.567143
$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$	-1.732050 1.732050 -1
$f(x) = \sin(x) - \cos(x) = 0$	45

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

والآن وبعد أن تم ايجاد الجذر الحقيقي تحليلياً سوف نقوم بحساب الجذر (التقريبي) لتلك الدوال وتحديد أفضل الطرق العددية لإيجاد الجذر.

ثانيًا- حساب القيم التقريبية للجذور باستخدام الطرق المفتوحة:

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقة نيوتن –رافسونو النقطة الثابتة و طريقة القاطع:**

– بتطبيق طريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذر المعادلة المتسامية:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

الصيغة العامة لطريقة نيوتن –رافسون:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\ , i = 0,1,2, \dots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي نيوتن –رافسون والنقطة الثابتة فلا بد من تحديد تخمين مبدئي وليكن $x_0 = -0.5$ وكذلك يتطلب استخدام هذه الطريقة إيجاد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ وهي:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$
$$f''(x) = e^{-x}$$

نختار تخمين مبدئي وليكن $x_0 = 0.5$ ، ثم نقوم بإيجاد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$
$$f''(x) = e^{-x}$$

ولكي نتأكد أن x_0 اختيار مناسب يضمن لنا التقارب لجذر المعادلة الغير خطية نتحقق من شرط التقارب وهو:

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)}\right| < 1$$

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

$$f(0.5) = e^{-0.5} - 0.5 = 0.106530$$

$$f'(x) = -e^{-0.5} - 1 = -1.606530$$
$$f''(x) = e^{-0.5} = 0.606530$$
$$\therefore \left|\frac{0.106530 * 0.606530}{-1.606530}\right| = 0.094021 < 1$$

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة نيوتن− رافسون نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

وتلخص الحسابات بالجدول التالي:

جدول 2. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة نيوتن − رافسون

i	x_n	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$
0	0.500000	11.838813%
1	0.566311	0.146700%
2	0.567143	0%

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 0.567143 وبنسبة خطأ 0%.

- بتطبيق طريقة القاطع لإيجاد جذر المعادلة المتسامية

$$f(x) = e^{-x} - x$$

الصيغة العامة لطريقة القاطع:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}, i = 0,1,2, \dots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقة القاطع فلا بد من تحديد تخمينين مبدئين وليكن:

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

$x_0 = 1$ ،$x_{-1} = 0$.

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة القاطع نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(e^{-x_i} - x_i)(x_{i-1} - x_i)}{(e^{-x_{i-1}} - x_{i-1}) - (e^{-x_i} - x_i)}$$

وتلخص الحسابات بالجدول التالي:

جدول 3. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة القاطع

i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$
1	0.612699	−0.070812	8. 032542%
2	0.564974	0.003400	0.382443%
3	0.567577	−0.000679	0.076523 %
4	0.567144	−0.000001	0.000176 %
5	0.567143	0.000000	0%

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 0.567143 وبنسبة خطأ 0%.

– بتطبيق طريقة النقطة الثابتة لإيجاد جذر المعادلة المتسامية

$$f(x) = e^{-x} - x$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة:

يتم وضع المعادلة ترتيبها على الصورة $x = g(x)$ ، سوف نبدأ الحل باستخدام ابسط صورة ممكنة لترتيب المعادلة في الصيغة المطلوبة وهي:

$$x_{i+1} = g(x_i) = e^{-x_i}$$

ولكي يكون اختيارنا مناسب للدالة $g(x)$ هناك شرط يعرف بشرط التقارب وهو

$$|g'(x)| \leq 1$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$|g'(x)| = |-e^{-x}|$$

$$|g'(0.5)| = |-e^{-0.5}| = 0.606530 < 1$$

من الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة نحصل على النتائج الموضحة بالجدول التالي:

جدول 4. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة النقطة الثابتة

i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$
0	0.500000	11.838813%
1	0.606530	6.944809%
2	0.545239	3.862165%
3	0.579703	2.214609%
4	0.560064	1.248186%
5	0.571172	0.710402%
6	0.564863	0.402015%
7	0.568438	0.228337%
8	0.566409	0.129420%
9	0.567559	0.073350%
10	0.566907	0.041612%
11	0.567277	0.023627%
12	0.567067	0.013400%
13	0.567186	0.007581%
14	0.567119	0.004231%
15	0.567157	0.002468%
16	0.567135	0.001410%
17	0.567147	0.000705%
18	0.567141	0.000352%
19	0.567144	0.000176%
20	0.567142	0.0001%
21	0.567144	0.000176%
22	0.567142	0.000176%

نتوقف عند اثنان وعشرين تكرار لأن:

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

$$|0.567142 - 0.567144| = |0.567144 - 0.567142|$$

$$\Longrightarrow 0.000002 = 0.000002$$

لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة كان ناتج إيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام هذه الطريقة يساوي 0.567144 وبنسبة خطأ 0.000176%.

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقة نيوتن –رافسون والنقطة الثابتة وطريقة القاطع:**

في المثال: $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ لم نتمكن من تطبيق طريقة نيوتن – رافسون وذلك لأننا لم نتمكن من إيجاد تخمين مبدئي يحقق لنا شرط التقارب للجذر 1.732050

– **بتطبيق طريقة النقطة الثابتة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية**

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة:

يتم وضع المعادلة ترتيبها على الصورة $x = g(x)$:

$$x_{i+1} = g(x_i) = (3x - x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$$

ولكي يكون اختيارنا مناسب للدالة $g(x)$ هناك شرط يعرف بشرط التقارب وهو

$$|g'(x)| \leq 1$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{3}(3x - x^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}(3 - 2x)\right|$$

$$|g'(0)| = \left|\frac{1}{3}(3(0) - (0)^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}(3 - 2(0))\right| = 0.480749 < 1$$

نختار $x_0 = 0$

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

من الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة نحصل على النتائج الموضحة بالجدول التالي:

جدول 5. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة النقطة الثابتة

i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert$%
0	0	
1	1.442249	7.029185%
2	1.737645	0.323027%
3	1.731758	0.016858%
4	1.732065	0.000866%
5	1.732049	0.000057%
6	1.732050	0%

نتوقف عند سبع تكرارات لأن $f(x_n) = 0$ وبالتالي جذر المعادلة$f(x) = x^3 +$ $x^2 - 3x - 3$باستخدام هذه الطريقة 1.732050وبنسبة خطأ 0%.

في هذا المثال نلاحظ انه كانت المعادلة الغير خطية كثيرة حدود مكونة من حدود بينها عمليات ضرب وقسمة وطرح وجمع، وتتكون هذه الحدود من ثوابت ومعاملات ومتغيرات لا يمكن تطبيق طريقة نيوتن –رافسون لأنه لا يمكن إيجاد x (تخمين مبدئي) يحقق شرط التقارب $|g'(x)| < 1$

- **بتطبيق طريقة القاطع لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

الصيغة العامة لطريقة القاطع:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}, i = 0,1,2, \ldots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقة القاطع فلا بد من تحديد تخمينين مبدئين وليكن

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

$x_0 = 2$ ،$x_{-1} = 1$.

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة القاطع نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 + x_i^2 - 3x_i - 3)(x_{i-1} - x_i)}{(x_{i-1}^3 + x_{i-1}^2 - 3x_{i-1} - 3) - (x_i^3 + x_i^2 - 3x_i - 3)}$$

وتلخص الحسابات بالجدول التالي:

جدول 6. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة القاطع

i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$
0	0	-3	-
1	1.442249	−2.246668	100%
2	1.737645	0.048889	16.999789%
3	1.731758	−0.002770	0.339943%
4	1.732065	0.000134	0.0307%
5	1.732049	−0.000017	0.00163
6	1.732050	−0.000007	0%

نتوقف عند سبع تكرارات لأن $f(x_n) = 0$ وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ باستخدام هذه الطريقة 1.732050 وبنسبة خطأ 0%.

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقة نيوتن –رافسون والنقطة الثابتة وطريقة القاطع:**

– **بتطبيق طريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

الصيغة العامة لطريقة نيوتن–رافسون:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, i = 0,1,2, \dots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي نيوتن –رافسون والنقطة الثابتة فلا بد من تحديد تخمين مبدئي وليكن $x_0 = 40$ وكذلك يتطلب استخدام هذه الطريقة إيجاد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ وهي:

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$
$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

ولكي نتأكد أن x_0 اختيار مناسب يضمن لنا التقارب لجذر المعادلة الغير خطية نتحقق من شرط التقارب وهو:

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)}\right| < 1$$

$$f(40) = \cos(40) - \sin(40) = 0.123256$$

$$f'(40) = -\sin(40) - \cos(40) = -1.408832$$
$$f''(40) = -\cos(40) + \sin(40) = -0.123256$$
$$\therefore \left|\frac{0.123256 \ * -0.123256}{-1.408832}\right| = 0.010783 < 1$$

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة نيوتن–رافسون نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$$

جدول 7. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة نيوتن – رافسون

I	x_n	$\lvert\varepsilon_t\rvert$%
0	40	11.11111%
1	40.087488	10.916693%
2	40.173438	10.725704%
3	40.257877	10.538062%
4	40.340832	10.353717%
5	40.422329	10.172613%

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م   وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

6	40.502394	9.994691%
⋮	⋮	⋮
904	44.999999	
905	44.999999	0%
906	44.999999	0%

نتوقف عند التكرار تسعمائة وستة لأن:

$$|x_{906} - x_{905}| = |x_{905} - x_{904}|$$

$$\Longrightarrow |44.999999 - 44.999999| = |44.999999 - 44.999999| = 0$$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 44.999999 و بنسبة خطأ 0%.

- **بتطبيق طريقة القاطع لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

الصيغة العامة لطريقة القاطع:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}, i = 0,1,2, \dots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقة القاطع فلا بد من تحديد تخمينين مبدئين وليكن

$x_0 = 46$ ،$x_{-1} = 44$.

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة القاطع نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(\sin x_i - \cos x_i)(x_{i-1} - x_i)}{(\sin x_{i-1} - \cos x_{i-1}) - (\sin x_i - \cos x_i)}$$

وتلخص الحسابات بالجدول التالي:

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

جدول 8. يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة القاطع

i	x_i	$f(x_i)$	$\|\varepsilon_t\|\%$
1	45.000040	0.000000	0.000000

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = \sin x - \cos x$ باستخدام هذه الطريقة45.000040وبنسبة خطأ %0.000000.

ملاحظة:

1. من خلال هذا المثال أنه إذا كانت المعادلة غير قابلة للفصل فإن إيجاد الجذر التقريبي باستخدام طريقة نيوتن رافسون سيكون بطئ ويحتاج لعدد كبير من التكراراتحتى وإن كان التخمين المبدئي الذي يحقق شرط التقارب وقريب من الجذر الحقيقي.
2. لا يمكن تطبيق طريقة النقطة الثابتة على هذا المثال لعدم إمكانية فصل x عن المعادلة لان x في هذه المعادلة هي عبارة عن زاوية المعادلة.

الاستنتـــــاجات والتوصيـــــات:

لأجل مقارنة النتائج ومعرفة تأثير نوع المعادلة الغير خطية على هذه النتائج لهذه الطرق العددية لنكتبها على شكل جدول ليتسنى لنا ملاحظة الفرق بينها من حيث تقارب القيم التقريبية مع القيم الحقيقية:

International Science and Technology Journal
المجلة الدولية للعلوم والتقنية

Volume 35 العدد
Part 1 المجلد
October 2024 اكتوبر

المجلة الدولية للعلوم والتقنية
International Science and Technology Journal
ISTJ

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

جدول 9. يبين القيم الحقيقية والتقريبية لجذور المعادلات الغير خطية

المعادلة الغير خطية	القيمة الحقيقية	الطرق المفتوحة		
		باستخدام طريقة نيوتن رافسون	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	باستخدام طريقة القاطع
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0.567143	0.567143	0.567144	0.567143
المعادلة الغير خطية	القيمة الحقيقية	الطرق المفتوحة		
		باستخدام طريقة النقطة الثابتة	باستخدام طريقة القاطع	
$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$	1.732050	1.732050	0.567143	
المعادلة الغير خطية	القيمة الحقيقية	الطرق المفتوحة		
		باستخدام طريقة نيوتن رافسون	باستخدام طريقة القاطع	
$f(x) = \sin x - \cos x = 0$	45	44.999999	45.000040	

جدول 10. يبين الخطأ النسبي المئوي لجذر المعادلة الغير خطية التقريبي

المعادلة الغير خطية	الخطأ النسبي المئوي بالطرق المشروحة سابقًا		
	باستخدام طريقة نيوتن رافسون	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	باستخدام طريقة القاطع
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0%	0.000176%	0%
المعادلة الغير خطية	القيم التقريبية		
	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	باستخدام طريقة القاطع	
$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$	0%	0%	
المعادلة الغير خطية	القيم التقريبية		
	باستخدام طريقة نيوتن رافسون	باستخدام طريقة القاطع	
$f(x) = \sin x - \cos x = 0$	0%	0%	

وبعد أن تم حساب جذر المعادلة الغير خطية تحليليًا وعدديًا تم التوصل إلى الناتج التالية:

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

1. يمكن حل المعادلة الغير خطية وإيجاد الجذر باستخدام الطرق العددية المفتوحة، إذا تمكنا من إيجاد تخمين مبدئي يحقق شرط التقارب، حتى وإن لم يكن شرط التوقف (ε) مذكور في المسألة، وذلك عن طريق تحقيق أحد الشرطين التاليين:

$f(x_n) = 0$ أو $|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}|$

ولنطلق عليهما اسم شرط التوقف الداخلي.

2. يتحكم التخمين المبدئي في إمكانية أو عدم إمكانية تطبيق طريقة نيوتن – رافسون على المعادلة الغير خطية لإيجاد الجذر التقريبي، فإذا كان التخمين المبدئي يحقق شرط التقارب للجذر فإنه بالإمكان تطبيق هذه الطريقة لإيجاد الجذر التقريبي للمعادلة الغير خطية، وإذا لم نتمكن من إيجاد التخمين المبدئي الذي يحقق شرط التقارب للجذر فإنه لا يمكن تطبيق هذه الطريقة، كذلك من الممكن أن يجعل التخمين المبدئي باستخدام طريقة نيوتن رافسون x_{i+1} تؤول لكمية غير معرفة عندما $f'(x_i) = 0$.

3. إن استخدام طريقة القاطع في حال تمكنا من إيجاد تخمين مبدئي يحقق لنا التقارب من الجذر يعطي نتيجة ادق أدق وأقرب للجذر الحقيقي من طريقة نيوتن –رافسون وهذا يخالف بعض النتائج التي توصل اليها المؤلف عيسى بن عبدالله السعيد في كتابه التحليل العددي.

4. إذا كانت المعادلة مثلثيه غير قابلة للفصل فإن إيجاد الجذر التقريبي باستخدام طريقة نيوتن –رافسون سيكون بطيء ويحتاج لعدد كبير من التكرارات حتى وإن كان التخمين المبدئي يحقق شرط التقارب وقريب جداً من الجذر الحقيقي، كذلك في مثل هذا النوع من المعادلة الغير خطية لا يمكن تطبيق طريقة النقطة الثابتة لعدم إمكانية فصل x عن المعادلة لأن x في هذه الحالة هو عبارة عن الزاوية.

5. إذا كانت المعادلة الغير خطية كثيرة حدود مكونة من حدود بينها عمليات ضرب وقسمة وطرح وجمع، وتتكون هذه الحدود من ثوابت ومعاملات ومتغيرات لا يمكن تطبيق طريقة نيوتن –رافسون لأنه لا يمكن إيجاد x (تخمين مبدئي) يحقق شرط التقارب $|g'(x)| < 1$.

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 10/2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 10/2024م

الخلاصـــــــــــة:

خلصت الدراسة على أن للتخمين المبدئي إمكانية أو عدم إمكانية تطبيق بعض الطرق لإيجاد الجذر التقريبي للمعادلة الغير خطية وذلك حسب تمكننا من تحقيق أو عدم تحقيق شرط التقارب، فإذا تمكنا من إيجاد التخمين المبدئي الذي يحقق شرط التقارب فإن استخدام طريقة القاطع يعطي لنا نتيجة أكثر دقة وأقرب للجذر الحقيقي.

مصطلحـــــات البحـــــث:

الدالة: هي علاقة أو قاعدة تعني أن قيمة متغير معين تعتمد على قيمة متغير آخر أو أكثر من متغير، وإذا كانت fدالة نطاقها A فإن الرسم البياني ل f هي مجموعة الأزواج المرتبة $\{(x, f(x)): x\epsilon A\}$معينة في المستوى ألإحداثي (Anderson & Feil, 2005)

عند حساب الجذور باستخدام الطرق التكرارية، سنحتاج الى تقدير تلك الأخطاء المصاحبة لتلك الحسابات للتحقق من دقة النتائج، ويمكن تعرف نوعين أساسيين من الأخطاء المصاحبة لعمليات التكرار العددية (فضيلة و الرويعي، 2004)هما:

- **الخطأ المطلق:** ويعرف بأنهالقيمة المطلقة للفرق بين القيمة المحسوبة في الخطوة التكرارية الحالي والقيمة المضبوطة، أي أن الخطأ المطلق =| القيمة المحسوبة – القيمة المضبوطة|، فإذا رمزنا للقيمة الفعلية بالرمز x_0 والقيمة التقريبية بالرمز xوبالتالي فإن الخطأ المطلق e_x يكون كالتالي:

$$e_x = |x - x_0|$$

- **الخطأ النسبي:**ويعرف الخطأ المطلق مقسومًا على القيمة المضبوطة، ويرمز له بالرمز δ_x:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x_0}$$

- **الخطأ المئوي:** ويعرف بأنه الخطأ النسبي مضروبًا في 100، و احيانًا يسمى بالنسبة المئوية للخطأ أي أن:

النسبة المئوية للخطأ = الخطأ النسبي × 100

$$\varepsilon_t = \delta_x \times 100$$

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

<u>المعادلة الخطية</u>: هي متعددة حدود من الدرجة الأولى، تكتب على الصورة= $f(x)$ $ax+b$ ويكون حل هذه المعادلة بإيجاد قيمة x التي تجعل المعادلة تساوي صفر:

$$f(x) = ax + b = 0$$

وتسمى هذه القيمة جذرا، أو صفراً للمعادلة التفاضلية.

<u>المعادلة الغير خطية</u>: هي متعددة حدود من درجة اعلى من الدرجة الأولى، ولا يمكن حلها باستخدام الطرق الرياضية البسيطة للحسابات الجبرية، بل يستخدم لها العديد من الأساليب الطرق من بينها الطرق العددية والتي سنتطرق لبعضها في هذا البحث.

كل الكتب والمراجع التي تم إيجاد حل المعادلات الغير خطية لابد من ε يحقق لنا شرط التوقف

$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ أو $f(x_n) \le \varepsilon$، ولكن ماذا لو لم يكن ε مذكور في المثال فكيف يتم التوقف؟

يمكن حل هذه المعضلة عن طريق شرط التوقف الداخلي والذي تم التحقق منه لإيجاد حل جذر المعادلة الغير خطية:

<u>شرط التوقف الداخلي</u>:

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}| \text{ أو } f(x_n) = 0$$

المـــــــراجـــــع:

ريتشاردل. بوردين وج. دوغلاس فايرس (2014). التحليل العددي. ترجمة ا. د محمد صبحي أبو صالح، العبيكان للنشر. ص(45– 82).

سعد محمد فضيلة، و النفاتي معمر الرويعي (2004)."التحليل العددي للمهندسين". طرابلس: منشورات مكتب البحوث والاستشارات الهندسية. المجلد الأولى. ص33؛ ص ص(261–262).

عمر محمد التومي واحمد حمر الشوشة (2015). التحليل العددي. ص ص(11–42).

تم استلام الورقة بتاريخ:27/ 2024/10م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:30/ 2024/10م

عيسى بن عبد الله السعيد (2011). التحليل العددي. الرياض: النشر العلمي والمطابع – جامعة الملك سعود. ص ص(57–84) .

كوثر عبود (2018). التحليل العددي وطرق حسابه بالماثلاب. الطبعة الأولى. ص ص (23–54)

نصر الدين عيد. (2011). تحليل عددي. منشورات جامعة حلب كلية العلوم. ص ص35–68.